Stationslernen: Die allgemeine Sinusfunktion

Sieben Situationen, eine Gleichung: $f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$

Wichtig: Die Aufgabenblätter bleiben an den Stationen!

- Die Blätter werden **nicht beschriftet und nicht mitgenommen** – sie werden von allen Gruppen benutzt.
- Ihr schreibt **alles in euer Heft**. Beginnt jede Station mit der Überschrift **„Station Nr.: Titel“**, schreibt die Teilaufgaben mit Buchstaben, den Rechenweg und bei Sachfragen einen Antwortsatz.
- Skizzen und Zeichnungen fertigt ihr ebenfalls im Heft an.

So geht ihr vor

1. Arbeitet zu zweit oder zu dritt. Die Reihenfolge der Stationen ist beliebig.
2. Pro Station habt ihr etwa **10–15 Minuten**. Die Aufgaben mit ★ **Für Schnelle** sind freiwillig.
3. Danach vergleicht ihr mit dem **Lösungsblatt** der Station. Wer nicht weiterkommt, liest dort zuerst nur den **Tipp**.
4. Hakt die erledigten Stationen in eurem Heft ab.

Die Stationen

Nr.	Titel	Ihr übt vor allem …	erledigt
1	Ein- und Ausatmen	Gleichung aus einer Textbeschreibung aufstellen; Startpunkt aus dem Tiefpunkt	☐
2	Der Herzschlag	Gleichung aus einem Graphen ablesen	☐
3	Das Wetter in Berlin	Gleichung aus einer Messwerttabelle; Modell und Wirklichkeit vergleichen	☐
4	Die Mondphasen	Startpunkt bestimmen; besondere Zeitpunkte ohne Rechnung finden	☐
5	Strom aus der Steckdose	„Rückwärts“: aus der Gleichung Eigenschaften und Graph bestimmen	☐
6	Das Fahrradpedal	Gleichung aus einer Geometrie-Beschreibung; Startpunkt aus dem Hochpunkt	☐
7	Die innere Uhr	Gleichung aus Text; Verschiebung deuten	☐

Zur Erinnerung: $a = \frac{\text{Max}-\text{Min}}{2}$ $d = \frac{\text{Max}+\text{Min}}{2}$ $b = \frac{2\pi}{p}$ c = Startpunkt (Mittellinie, aufwärts)

Station 1 Ein- und Ausatmen

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 1: Ein- und Ausatmen“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Beim ruhigen Atmen ändert sich die Luftmenge in der Lunge ständig. Bei der Sportlerin Lena hat man gemessen: Nach dem Ausatmen sind noch **2,4 Liter** Luft in ihrer Lunge, nach dem Einatmen sind es **2,9 Liter**. Ein vollständiger Atemzug (einmal ein- und wieder ausatmen) dauert **5 Sekunden**.

Die Luftmenge V (in Litern) nach t Sekunden soll durch eine Funktion

$$V(t) = a \cdot \sin\big(b \cdot (t - c)\big) + d$$

beschrieben werden. Die Messung beginnt bei $t = 0$ genau in dem Moment, in dem Lena **vollständig ausgeatmet** hat.

(a) Wie viele Atemzüge macht Lena in einer Minute?

(b) Bestimmt die Parameter a, d und b.

(c) Bestimmt den Parameter c und gebt die vollständige Funktionsgleichung an. Überlegt dazu: Was passiert bei $t = 0$ mit der Kurve – ist sie dort oben, unten oder in der Mitte?

(d) Berechnet, wie viel Luft nach 2 Sekunden und nach 4 Sekunden in Lenas Lunge ist. Rundet auf zwei Dezimalen. Atmet Lena zu diesen Zeitpunkten gerade ein oder aus?

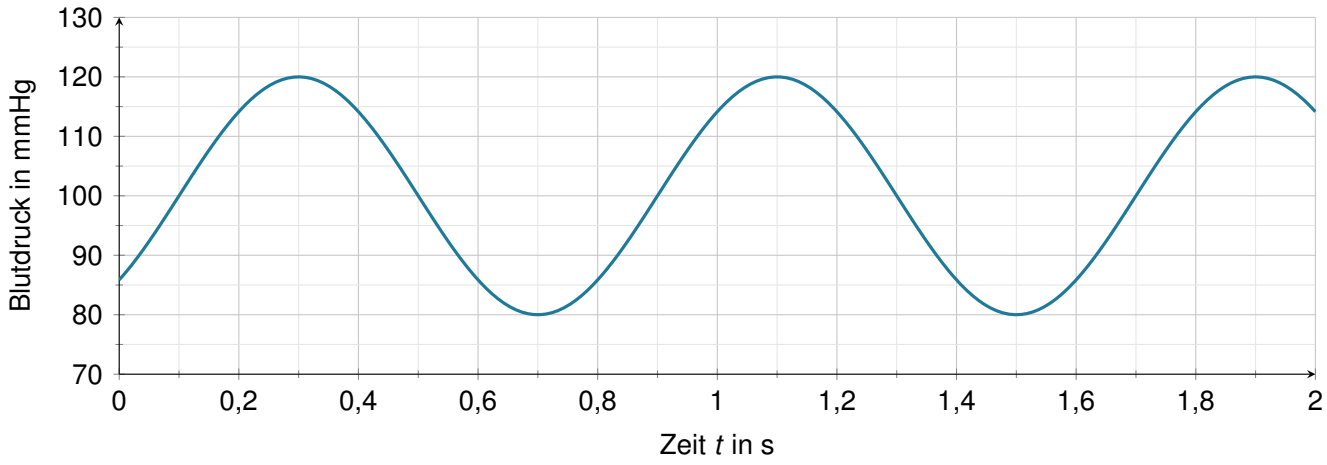
★ **Für Schnelle:** Beim Joggen atmet Lena tiefer und schneller: Die Luftmenge schwankt nun zwischen 2,0 und 3,6 Litern, ein Atemzug dauert nur noch 2 Sekunden. Welche Parameter ändern sich? Gebt die neuen Werte an.

Station 2 — Der Herzschlag

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 2: Der Herzschlag“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Mit jedem Herzschlag steigt der Druck in den Blutgefäßen an und fällt danach wieder ab. Bei einem gesunden Jugendlichen wurde der Blutdruck gemessen. Vereinfacht lässt sich der Verlauf so darstellen (t in Sekunden, Blutdruck p in der Einheit mmHg, „Millimeter Quecksilbersäule“):



(a) Lest den höchsten und den niedrigsten Blutdruck sowie die Dauer eines Herzschlags (Periodenlänge) ab.

(b) Bestimmt daraus a, d und b.

(c) Lest den Startpunkt c ab und gebt die vollständige Funktionsgleichung an.

(d) Wie oft schlägt das Herz in einer Minute (Puls)?

(e) Berechnet den Blutdruck nach $t = 1$ Sekunde. Rundet auf ganze mmHg und überprüft euer Ergebnis am Graphen.

★ **Für Schnelle:** Ärztinnen und Ärzte geben den Blutdruck als „Höchstwert zu Tiefstwert“ an, hier also „120 zu 80“. Bei einem Patienten wird „140 zu 90“ gemessen. Wie lauten bei ihm a und d?

Station 3 — Das Wetter in Berlin

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 3: Das Wetter in Berlin“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Die Tabelle zeigt ungefähre Durchschnittstemperaturen für Berlin über viele Jahre (Monat x: 1 = Januar, . . . , 12 = Dezember).

Monat x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Temperatur in °C	0,5	1,5	5,0	9,5	14,5	18,0	19,5	19,0	15,0	10,0	5,0	2,0

Der Temperaturverlauf soll durch eine Funktion

$$T(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$$

beschrieben werden.

(a) Lest aus der Tabelle die höchste und die niedrigste Temperatur ab und berechnet a und d.

(b) Bestimmt b. Überlegt: Nach wie vielen Monaten wiederholt sich der Verlauf?

(c) Der wärmste Monat ist der Juli ($x = 7$). Bestimmt damit c und gebt die Funktionsgleichung an. In welchem Monat ist es laut Modell genau so warm wie im Jahresdurchschnitt?

(d) Berechnet mit eurer Funktion die Temperatur für Juni ($x = 6$) und für November ($x = 11$). Vergleicht mit der Tabelle: Wie groß ist jeweils die Abweichung?

Achtung: „°C“ ist eine Temperatureinheit, kein Winkel. Der Taschenrechner bleibt auf **RAD**!

★ **Für Schnelle:** Berechnet die Modellwerte für alle Monate von April bis September. In welchem Monat weicht das Modell am stärksten von der Tabelle ab? Beurteilt: Beschreibt die Sinusfunktion den Temperaturverlauf gut?

Station 4 Die Mondphasen

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 4: Die Mondphasen“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Der Mond leuchtet nicht selbst, er wird von der Sonne angestrahlt. Von der Erde aus sehen wir deshalb mal einen größeren, mal einen kleineren Teil seiner Scheibe beleuchtet. Bei **Neumond** sehen wir **0 %** der Scheibe beleuchtet, bei **Vollmond 100 %**. Von einem Neumond bis zum nächsten vergehen etwa **29,5 Tage**.

Der beleuchtete Anteil M (in Prozent) am Tag x wird durch

$$M(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$$

beschrieben. An Tag $x = 0$ ist **Neumond**.

(a) Bestimmt a, d und b. Rundet b auf drei Dezimalen.

(b) Bestimmt c und gebt die Funktionsgleichung an.
Hinweis: Neumond bedeutet, dass die Kurve an dieser Stelle ganz unten ist.

(c) An welchem Tag ist zum ersten Mal Vollmond? Begründet ohne Taschenrechner.

(d) Berechnet, wie viel Prozent der Mondscheibe an Tag 10 und an Tag 20 beleuchtet sind. Rundet auf ganze Prozent. Was fällt euch auf? Erklärt, warum die Werte ähnlich sind.

★ **Für Schnelle:** Bei „Halbmond“ ist genau die Hälfte der Scheibe beleuchtet. An welchen zwei Tagen ist im ersten Monat Halbmond? Begründet mithilfe der Periodenlänge – ohne die Gleichung zu lösen.

Station 5 Strom aus der Steckdose

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 5: Strom aus der Steckdose“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Aus der Steckdose kommt **Wechselstrom**: Die elektrische Spannung U ist nicht konstant, sondern schwingt sehr schnell hin und her. In Deutschland wird sie durch folgende Funktion beschrieben (t in Sekunden, U in Volt):

$$U(t) = 325 \cdot \sin\left(100\pi \cdot t\right)$$

Diesmal geht es **rückwärts**: Die Gleichung ist gegeben, ihr bestimmt daraus die Eigenschaften.

(a) Gebt die Werte der Parameter a, b, c und d an. Welche größte und welche kleinste Spannung tritt auf?

(b) Berechnet die Periodenlänge p. Gebt sie in Sekunden und in Millisekunden an.
Wie viele vollständige Schwingungen macht die Spannung in einer Sekunde? (Diese Zahl nennt man **Frequenz**, Einheit Hertz.)

(c) Berechnet die Spannung zu den Zeitpunkten $t = 0{,}003\,\text{s}$ und $t = 0{,}013\,\text{s}$. Rundet auf ganze Volt.

(d) Skizziert den Graphen von U für $0 \leq t \leq 0{,}04$ in euer Heft. Markiert dabei Startpunkt, Hochpunkte und Tiefpunkte mit ihren Koordinaten.
Tipp: Teilt eine Periode in vier gleich lange Abschnitte.

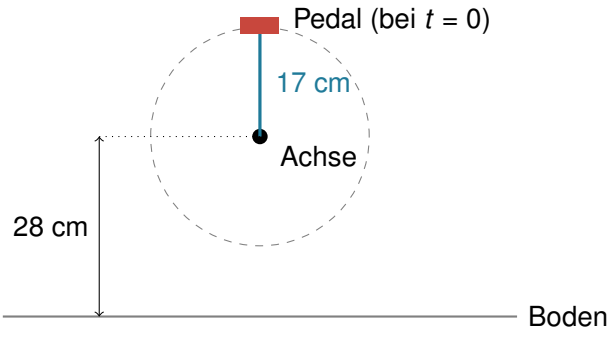
★ **Für Schnelle:** In den USA beträgt die größte Spannung etwa 170 Volt, die Frequenz 60 Hertz. Stellt die passende Funktionsgleichung auf.

Station 6 — Das Fahrradpedal

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 6: Das Fahrradpedal“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Ben fährt Fahrrad. Die Achse, um die sich die Pedale drehen (das Tretlager), liegt **28 cm** über dem Boden. Die Tretkurbel ist **17 cm** lang, das Pedal bewegt sich also auf einem Kreis mit Radius 17 cm um die Achse. Ben tritt gleichmäßig: Eine volle Kurbelumdrehung dauert **1,2 Sekunden**.



Die Höhe h des rechten Pedals über dem Boden (in cm) nach t Sekunden wird durch

$$h(t) = a \cdot \sin\big(b \cdot (t - c)\big) + d$$

beschrieben. Bei $t = 0$ steht das rechte Pedal **ganz oben**.

(a) Wie hoch über dem Boden ist das Pedal an seinem höchsten und an seinem tiefsten Punkt?

(b) Bestimmt a, d und b.

(c) Bestimmt den Startpunkt c und gebt die vollständige Funktionsgleichung an.
Hinweis: Der Startpunkt darf auch negativ sein.

(d) Berechnet die Höhe des Pedals nach 0,5 Sekunden und nach 1 Sekunde. Rundet auf eine Dezimale.
Passen die Ergebnisse zu der Vorstellung, wo das Pedal sich gerade befindet?

★ **Für Schnelle:** Ben tritt schneller und schafft jetzt 80 Kurbelumdrehungen pro Minute. Wie lange dauert eine Umdrehung? Welcher Parameter ändert sich und wie lautet sein neuer Wert?

Station 7 Die innere Uhr

Dieses Blatt bleibt an der Station! **Nicht beschriften – nicht mitnehmen**

Schreibt **alles in euer Heft**: die Überschrift **„Station 7: Die innere Uhr“**, zu jeder Aufgabe die Nummer, den Rechenweg und bei Sachfragen einen **Antwortsatz**. Taschenrechner auf **RAD**! Wenn ihr fertig seid: mit dem **Lösungsblatt** vergleichen und im Heft mit einem anderen Stift korrigieren.

Unsere Körpertemperatur ist nicht den ganzen Tag gleich – sie folgt einer „inneren Uhr“. Bei einem gesunden Menschen ist sie gegen **4 Uhr morgens** am niedrigsten (**36,4 °C**) und gegen **16 Uhr** am höchsten (**37,2 °C**). Der Verlauf wiederholt sich jeden Tag.

Die Körpertemperatur K (in °C) zur Uhrzeit x (in Stunden, $x = 0$ ist Mitternacht) wird durch

$$K(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$$

beschrieben.

(a) Bestimmt a und d.

(b) Wie groß ist die Periodenlänge? Bestimmt b.

(c) Bestimmt c und gebt die Funktionsgleichung an. Um wie viel Uhr erreicht die Körpertemperatur am Vormittag ihren Mittelwert?

(d) Berechnet die Körpertemperatur um 8 Uhr morgens und um 21 Uhr. Rundet auf zwei Dezimalen.

Achtung: „°C“ ist eine Temperatureinheit, kein Winkel. Der Taschenrechner bleibt auf **RAD**!

★ **Für Schnelle:** Frau Kaya arbeitet dauerhaft in der Nachtschicht. Ihre innere Uhr hat sich deshalb um 8 Stunden nach hinten verschoben (Tiefpunkt um 12 Uhr, Hochpunkt um 24 Uhr). Welcher Parameter ändert sich? Gebt ihre Funktionsgleichung an.